

# Diskretisierung und Rückgewinnung kontinuierlicher Signale

Helmut Glünder

Sie möchten auf den Text oder Teile davon Bezug nehmen?  
Dann zitieren Sie bitte mit folgenden bibliographischen Angaben:

---

Glünder H. (2016) Diskretisierung und Rückgewinnung kontinuierlicher Signale. *Typoscript*. Selbstverlag, München. – PDF-Datei:  
<[www.gluender.de/Writings/WritingsTexts/HardText.html#Gl-2016-1](http://www.gluender.de/Writings/WritingsTexts/HardText.html#Gl-2016-1)>

---

© 2016 H. Glünder, München

Text und Bilder urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten.

Respektieren Sie bitte das geistige Eigentum und Copyright.

Es ist weder gestattet das Dokument oder Teile davon kommerziell zu nutzen noch das veränderte Dokument oder Auszüge daraus zu verbreiten.

## Über den Autor

### Professor Dr.-Ing. Helmut Glünder

Geboren 1951, lebt vorwiegend in München

#### Universitätsstudien

Technische Universität München

- Nachrichtentechnik, Signalverarbeitung und Kybernetik

Ludwig-Maximilians-Universität München

- Philosophie, Wissenschaftstheorie und Phonetik

#### Hochschulassistent und Wissenschaftlicher Mitarbeiter

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München

- Lehre alle nachgenannten Themen, Technik und Politik Neuer Medien
- Forschung Mathematische Systemtheorie, Biokybernetik, Psychophysik, Mustererkennung, Bildsignalanalyse, Tomographie, optische Parallelrechner

#### Promotion zum Doktor-Ingenieur

Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München

- Dissertation Invariante Bildbeschreibung

#### Lehrauftrag für Angewandte Optik

Fachhochschule München

#### Wissenschaftlicher Mitarbeiter

Institut für Medizinische Psychologie der Ludwig-Maximilians-Universität München

- Lehre Medizinische Psychologie, Sensomotorik, Hirnentwicklung, neuronale Korrelate des Lernens
- Forschung Bewegungssehen, Sensomotorik, olfaktorische Mustererkennung

#### Lehrauftrag für Informationsverarbeitung in Nervensystemen

Technische Hochschule Darmstadt

#### Professeur Invité für Signalverarbeitung und Mustererkennung

École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne

- Lehre Bildverarbeitung, Mustererkennung, optische Signalverarbeitung
- Forschung Theorie invarianter Bildmustererkennung

#### Gastdozent für Signalverarbeitende Optik

Université de Rennes I

- Lehre Fourier-Optik

#### Lehrauftrag für Medizinische Psychologie

Ludwig-Maximilians-Universität München

#### Vertretungsprofessur für Neuroinformatik

Universität Ulm

- Lehre Bildverarbeitung, Mustererkennung, neuronale Netze, theoretische Neurobiologie
- Forschung Hirntheorie, neuronale Lernprozesse, impulsgekoppelte formale Neurone

#### Gründung und Geschäftsführung

Bureau für wissenschaftlich-technische Beratung und Projektierung

- Themen Erfassung, Aufbereitung und Klassifikation von Signalen und Daten, Schwerpunkt: Bildhafte Signale und Bilder
- Kunden Industrie, Medienbranche, Hochschule und Kunst

#### Honorarprofessur für Theoretische Neurobiologie

Technische Universität Darmstadt

#### Weitere Arbeitsgebiete

Naturphilosophie, Psychologie, Kunsttheorie

#### Über 50 wissenschaftliche Originalpublikationen

# Diskretisierung und Rückgewinnung kontinuierlicher Signale

Helmut Glünder

*Zeitlich oder örtlich kontinuierlich verlaufende Größen oder Signale zu digitalisieren, erfordert ihre Diskretisierung und Quantisierung. Für die Erzeugung, Verarbeitung und Darstellung digitaler Daten ist daher das Verständnis der Bedingungen der informationserhaltenden Diskretisierung sowie der Rückgewinnung der kontinuierlichen Originale unerlässlich. Es wird versucht dieses Verständnis auf sowohl vergleichsweise einfache als auch anschauliche Weise zu vermitteln.*

*Ein Text über ein etabliertes Gebiet zeichnet sich nicht dadurch aus, welche Themen in ihm behandelt werden, sondern wie sie in ihm behandelt werden ...*

Athanasios Papoulis (1962)

## Einleitung

Diskretisierung oder Quantisierung stetiger Funktionen kann den Definitionsbereich oder den Wertebereich betreffen. Üblicherweise spricht man in der Signaltheorie im ersten Fall von Diskretisierung, im zweiten von Quantisierung eines wert- und zeit- oder ortskontinuierlichen Signals. Eine diskrete Funktion besteht also lediglich aus an definierten (Zeit)Punkten entnommenen Werten (Proben, Abtastwerten oder *Samples*) der kontinuierlichen Funktion, wogegen eine quantisierte einen gestuften Wertebereich aufweist. Bei äquidistanter Probenentnahme oder Abtastung spricht man von regulärer Diskretisierung – in der Nachrichten-Übertragungstechnik als „Puls Amplituden Modulation“ (PAM) bezeichnet –, bei der Wertdarstellung mit gleichen Stufen von linearer Quantisierung. Hier werden im weiteren die informationserhaltende Diskretisierung und die Rückgewinnung des kontinuierlichen Signals behandelt. Erstere ist Voraussetzung der „Digitalisierung“ von Signalen, die überdies die Quantisierung der diskreten Signalwerte sowie ihre Codierung erfordert und in der Nachrichten-Übertragungstechnik als „Puls Code Modulation“ (PCM) bekannt ist (Oliver *et al.* 1948).

Aufgrund geeigneter Abtastung sicher zu sein, daß ein zeit- oder ortsdiskretes Signal das ursprünglich zeit- beziehungsweise ortskontinuierliche ohne Informationsverlust repräsentiert, ist eine Sache, letzteres aus ersterem zu rekonstruieren, ist eine andere. Es

gilt also einerseits zwischen beiden Aufgaben zu unterscheiden (Higgins 1985), andererseits von Abtasttheorem (*Sampling Theorem*) nur zu sprechen, wenn tatsächlich die Verbindung beider im Sinn eines Theorems behandelt wird. Derart betrachtet (Meijering 2002), reduzieren sich die einschlägigen Beiträge auf vier, nämlich die von Vladimir A. Kotel'nikov (1933), Claude E. Shannon (1949), Isao Someya (1949) und Jeffrey D. Weston (1949).<sup>1</sup>

In den nächsten zwei Abschnitten wird eine mathematisch schlüssige, doch keineswegs rigorose Darstellung beider Aspekte des Abtasttheorems gegeben, wobei auf die üblicherweise herangezogene Fourier-Reihe verzichtet wird. Vielmehr wird lediglich die Kenntnis der zentralen Aussage der Fourier-Transformation vorausgesetzt. Den Inhalt der darauffolgenden Abschnitte zu verstehen, erfordert weitergehende Kenntnisse des Fourier-Kalküls.

<sup>1</sup> Émile Borel hat 1897 die Diskretisierung frequenzbegrenzter Funktionen und 1899 die Rekonstruktion durch die Kardinalreihe behandelt, allerdings keine Verbindung beider Aspekte im Sinn des Abtasttheorems hergestellt (Higgins 1985).

Herbert Raabe (1939) realisierte im Rahmen seiner Doktorarbeit am Institut von Karl Küpfmüller in Berlin ein PAM-System und formulierte die Abtastbedingung für Tief- und Bandpaß-Signale, behandelte aber die Rekonstruktion nur qualitativ. Shannon dürfte von der Dissertation gewußt haben, denn in seiner 1949 erschienenen Arbeit (vgl. Fußnote 5) zitiert er einen Artikel seines Kollegen Bennett (1941), in dem wiederum Raabes Publikation genannt ist.

Anfang 1943 arbeitete Alan Turing einige Wochen mit Shannon in den „Bell Telephone Labs“ über theoretische Aspekte der geheimen Sprachverschlüsselung (SIGSALY), die auf digitalisierten Vocodern beruhte (die verschlüsselte PCM wurde per sechsstufiger Frequenzumtastung als FSK-Signal gesendet). Welches Wissen bei dieser Kooperation in welche Richtung floß und ob Turing danach mit seinem Mathematiker-Kollegen Weston diesbezüglich Kontakt hatte, ist unbekannt. Jedenfalls begann Turing alsbald mit der Konzeption eines britischen Systems zur Sprachverschlüsselung (Delilah), das ohne Vocoder und Digitalisierung, sondern mit pulsamplituden-modulierten Sprachsignalen arbeiten sollte. (Hodges 1983)

## Informationserhaltende Diskretisierung

Daß und unter welchen Bedingungen sich kontinuierliche Funktionen informationserhaltend diskretisieren lassen, zeigt folgende Überlegung in zwei Schritten. Zunächst wird ein gleichförmig um seinen Ursprung rotierender Zeiger konstanter Länge betrachtet, aus dem sich bekanntlich die Kreisfunktionen herleiten, mithin auch Sinus und Kosinus. Die Rotationen sind in  $360^\circ$  periodisch und ein konkreter Zeigerumlauf ist eindeutig bestimmt durch die Zeigerlänge  $A$  und die Periode  $T = 2\pi\Delta t/\Delta\varphi$ , die durch die Zeit  $\Delta t$  gegeben ist, die zwischen zwei beliebigen Zeigerpositionen bekannter Winkeldifferenz  $\Delta\varphi$  vergeht. In der komplexen Zahlenebene stellt ein gleichförmig um den Koordinatenursprung rotierender Zeiger die harmonische Schwingung  $Ae^{i2\pi t/T}$  dar, die ebenso durch zwei „Messungen“ pro Periode definiert ist. Im regulären Fall gilt  $\Delta\varphi = \pi$ , mithin  $\Delta t = T/2$ , so daß eine komplexe harmonische Schwingung durch zwei diametrale Werte bestimmt ist.<sup>2</sup> Anders ausgedrückt, erfordert die informationserhaltende reguläre Diskretisierung einer komplexen harmonischen Schwingung der Frequenz  $f = 1/T$  eine periodische Abtastrate oder Abtastfrequenz  $f_0 \geq 2f = 2/T$ .

Wie von Joseph de Fourier vorgeschlagen, läßt sich praktisch jede Funktion  $a(t)$  als mit entsprechenden Koeffizienten  $A(f)$  bewertete Summe komplexer harmonischer Schwingung formulieren,<sup>3</sup> mithin als Integral  $a(t) = \int A(f)e^{i2\pi ft} df$ . Hieraus folgt die Grundbedingung für die informationserhaltende Diskretisierung von Funktionen, daß sie nämlich frequenzbegrenzt sein müssen. Bei Tiefpaßbegrenzung<sup>4</sup> dürfen sie lediglich aus Schwingungen der Frequenzen  $f \leq f_{\max} < \infty$  bestehen, wobei die höchste bekannt sein muß, weil sich nach ihr die Abtastfrequenz  $f_0 \geq 2f_{\max}$  bemißt. Umgekehrt fordert die Vorgabe einer Abtastfrequenz die Frequenzbegrenzung der Signale zumindest auf die nach Harry Nyquist (1928) benannte Frequenz  $f_N = f_0/2$ . Schließlich sei bemerkt, daß die Betrachtung zeitabhängiger Funktionen keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, die Aussage also entsprechend für ortsabhängige und mehrdimensionale Funktionen gilt.

Die Zahl der Freiheitsgrade eines auf  $f_{\max}$  begrenzten Signals der Dauer  $D$  – oder gleichbedeutend die Dimensionalität des entsprechenden Signalraums – läßt sich demnach zu  $2Df_{\max}$  abschätzen. Abschätzen deshalb, weil genaugenommen eine zeitbegrenzte Funktion nicht zugleich bandbegrenzt sein kann und umgekehrt. Die Kenntnis der Freiheitsgrade von Signalen war naturgemäß entscheidend für die Entwicklung und Anwendung der Informations- und Kommunikationstheorie, so daß es kaum verwundert, daß sich Shannon (1949) – wenn auch nicht als erster –, mit ihrer Bestimmung auseinanderzusetzen hatte.<sup>5</sup> Auch Weston (1949) wollte mit seiner Arbeit „eine Grundlage für eine allgemeine quantitative Theorie der Kommunikation“ schaffen.

## Ideale Rückgewinnung

Um aus einer zeitdiskreten Funktion  $a(k\Delta t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\Delta t = 1/f_0$  die ursprünglich kontinuierliche, auf  $f_{\max} = f_N$  begrenzte Funktion  $a(t)$  rückzugewinnen, gilt es zwischen den Abtastwerten fehlende Funktionsabschnitte durch Interpolation mit einer geeigneten Funktion  $s(t)$  zu bestimmen:

$$a(t) = \sum_k a(k\Delta t) \cdot s(t - k\Delta t)$$

Der Interpolationskern  $s(t)$  erschließt sich rein logisch dadurch, daß die Frequenzbegrenzung auch für ihn gelten darf, das heißt  $s(t) = \int S(f)e^{i2\pi ft} df$  mit den Integralgrenzen  $\pm f_N$ . Weil aber  $a(k\Delta t)$  eine informationserhaltende Darstellung von  $a(t)$  ist, muß  $s(t)$  zudem in den Grenzen  $\pm f_N$  frequenzunabhängig sein. Mit der Bedingung  $s(0) = 1$  folgt daraus  $S(f) = \Delta t = \text{const.}$  und – durch Integration<sup>6</sup> – der *Sinus cardinalis*

$$s(t) = \Delta t \int_{-f_N}^{+f_N} e^{i2\pi ft} df = \frac{\sin(\pi t/\Delta t)}{\pi t/\Delta t} = \text{sinc}(t/\Delta t).$$

Für diesen Interpolationskern gilt  $s(k\Delta t) = 0$  mit  $k \in \mathbb{Z}^*$ , das heißt er verschwindet zu den Abtastzeit-

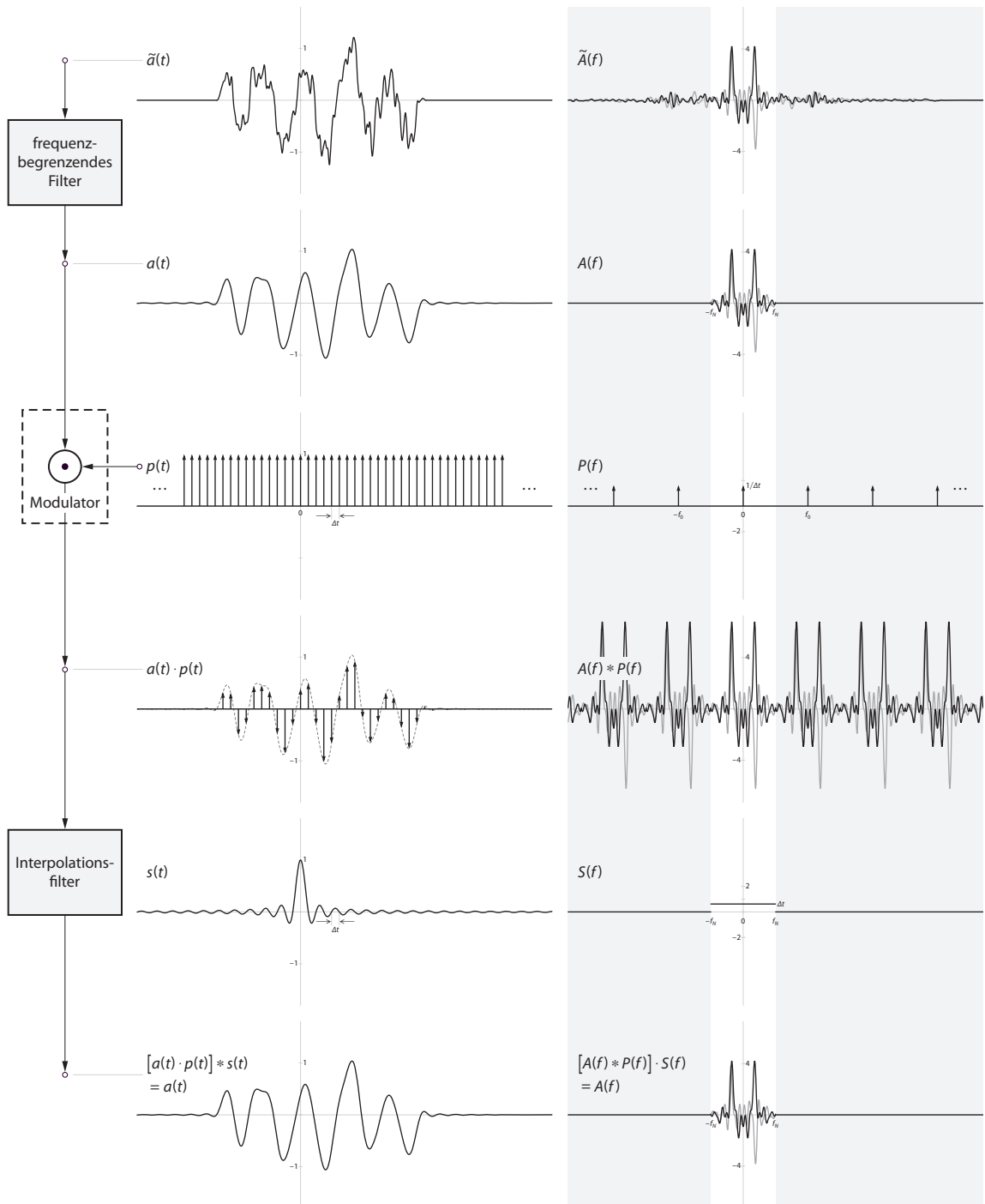
<sup>2</sup> Wie gezeigt, reichen zur informationserhaltenden Diskretisierung zwei beliebige Abtastwerte pro Periode, doch gestaltet sich die Rekonstruktion der ursprünglich kontinuierlichen Funktion aus irregulär entnommenen Werten aufwendiger als im Fall regulärer Diskretisierung (Neubauer 2003).

<sup>3</sup> Quadratische Integrierbarkeit der Funktionen vorausgesetzt

<sup>4</sup> Die Diskretisierung von Bandpaß-Signalen wird hier nicht behandelt.

<sup>5</sup> Shannon lieferte mit seiner bereits 1940 eingereichten, aber wegen ihrer militärischen Relevanz (Kryptographie) erst 1949 publizierten Arbeit (derlei Texte wurden erst 1948 freigegeben) einen epochalen Beitrag zur Nachrichten- und Informationstheorie. Obwohl er sowohl Diskretisierung als auch Rekonstruktion von Signalen behandelt, ist erstere für sein Anliegen natürlich vordringlich.

<sup>6</sup> Mit  $f_N = 1/(2\Delta t)$  erhält man  $s(t) = (e^{i\pi t/\Delta t} - e^{-i\pi t/\Delta t})/(i2\pi t/\Delta t)$  und mit der Eulerschen Identität  $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$  sodann den *Sinus cardinalis*.



Ideale Diskretisierung und Rückgewinnung einer kontinuierlichen frequenzbegrenzten Funktion  $a(t)$  entsprechend dem Signalfluß-Schema (links), dargestellt sowohl im Zeitbereich (daneben) als auch im Frequenzbereich (rechts) durch die komplex-wertigen Fourier-Spektren der zeitlichen Funktionen (schwarz: Realteil, grau: Imaginärteil). Das Symbol „\*“ steht für die Faltungsoperation.

ten ( $k \neq 0$ ), zu denen die Funktionswerte in Form der Abtastwerte vorliegen. Unter anderen kam Edmund T. Whittaker (1915) zu diesem Ergebnis und formulierte damit die nach ihm benannte Kardinalreihen-Entwicklung<sup>7</sup> frequenzbegrenzter Funktionen

$$a(t) = \sum_k a(k\Delta t) \cdot \text{sinc}(t/\Delta t - k).$$

Aus der Herleitung des *Sinus cardinalis* folgt, daß lineare Filter der Übertragungsfunktion  $S(f) = \Delta t \text{rect}(f\Delta t)$  (Idealer Tiefpaß, Kuppfmüller-Tiefpaß) die Interpolation von korrekt mit  $\Delta t$  abgetasteten Signalen leisten, was unter anderem nachfolgend illustriert wird.<sup>8</sup>

### Systemtheoretische Zusammenschau

Mithilfe des Faltungstheorems und zweier Fourier-Korrespondenzen – nämlich der  $\delta$ -Kammfunktion und der Rechteckfunktion (vgl. Fußnote 6) –, erschließen sich im Frequenzbereich anschaulich die Bedingungen für informationserhaltende Diskretisierung und Rekonstruktion sowie unmittelbar die Konsequenzen von Unterabtastung ( $f_{\max} > f_N$ ).

Informationserhaltende Diskretisierung setzt also frequenzbegrenzte Funktionen voraus; folglich ist die Realisierung der Begrenzung für ihr Verständnis unerheblich, obwohl sie oft keineswegs trivial<sup>8</sup> und in unzureichender Form<sup>9</sup> häufige Ursache von Diskretisierungsfehlern ist. Im veranschaulichten Beispiel liegt für die Diskretisierung mit der gegebenen Abtastfrequenz ein deutlich zu breitbandiges ( $f_{\max} > f_N$ ) Signal  $\tilde{a}(t)$  vor. Sein (komplexwertiges) Fourier-Spektrum  $\tilde{A}(f)$  gilt es daher durch Vorfilterung auf  $f_{\max} \leq f_N$  zu begrenzen, so daß für das resultierende Signalspektrum  $A(|f| > f_N) = 0$  gilt.

Wie im Beispiel, ist dafür ein idealer Tiefpaß optimal, doch sind, ohne Einfluß auf die Diskretisierung, auch Filter mit nicht konstantem Verlauf im Durchlaßbereich möglich. Die dann auftretenden linearen Signalverzerrungen lassen sich prinzipiell durch inverse Filterung beheben.

Zentral für die systemtheoretische Darstellung des Abtasttheorems ist die  $\delta$ -Kammfunktion  $p(t)$  (Abtastpuls), mithin eine unendliche Folge äquidistanter  $\delta$ -Impulse mit dem Impulsintegral eins. Ihr Fourier-Spektrum  $P(f)$  ist ebenfalls eine  $\delta$ -Kammfunktion, und zwar mit inverser Impulsperiode und ebensolchem Impulsintegral  $1/\Delta t$ . Die Signalabtastung besteht in der Modulation des Abtastpulses durch das Signal und wird idealerweise als Multiplikation der  $\delta$ -Kammfunktion  $p(t)$  mit der Funktion  $a(t)$  beschrieben. Dem Fourier-Kalkül gemäß korrespondiert zur Multiplikation die Faltungsoperation im Frequenzbereich, wodurch das mit dem Impulsintegral bewertete Signalspektrum  $\mathcal{A}(f)/\Delta t$  an jede Position der  $\delta$ -Kammfunktion  $P(f)$  rückt, was zu seiner periodischen und im Grenzfall  $f_{\max} = f_N$  lückenlosen Wiederholung führt. Bei Unterabtastung kommt es folglich zu spektralen Überlappungen (*Aliasing*), also zu additiven Überlagerungen von zumindest Teilen des Signalspektrums mit jeweils an den Impulspositionen gespiegelten: Derlei Spektralanteile tauchen bei falschen Frequenzen auf, quasi unter falschem Namen, und werden deshalb Alias-Anteile genannt.

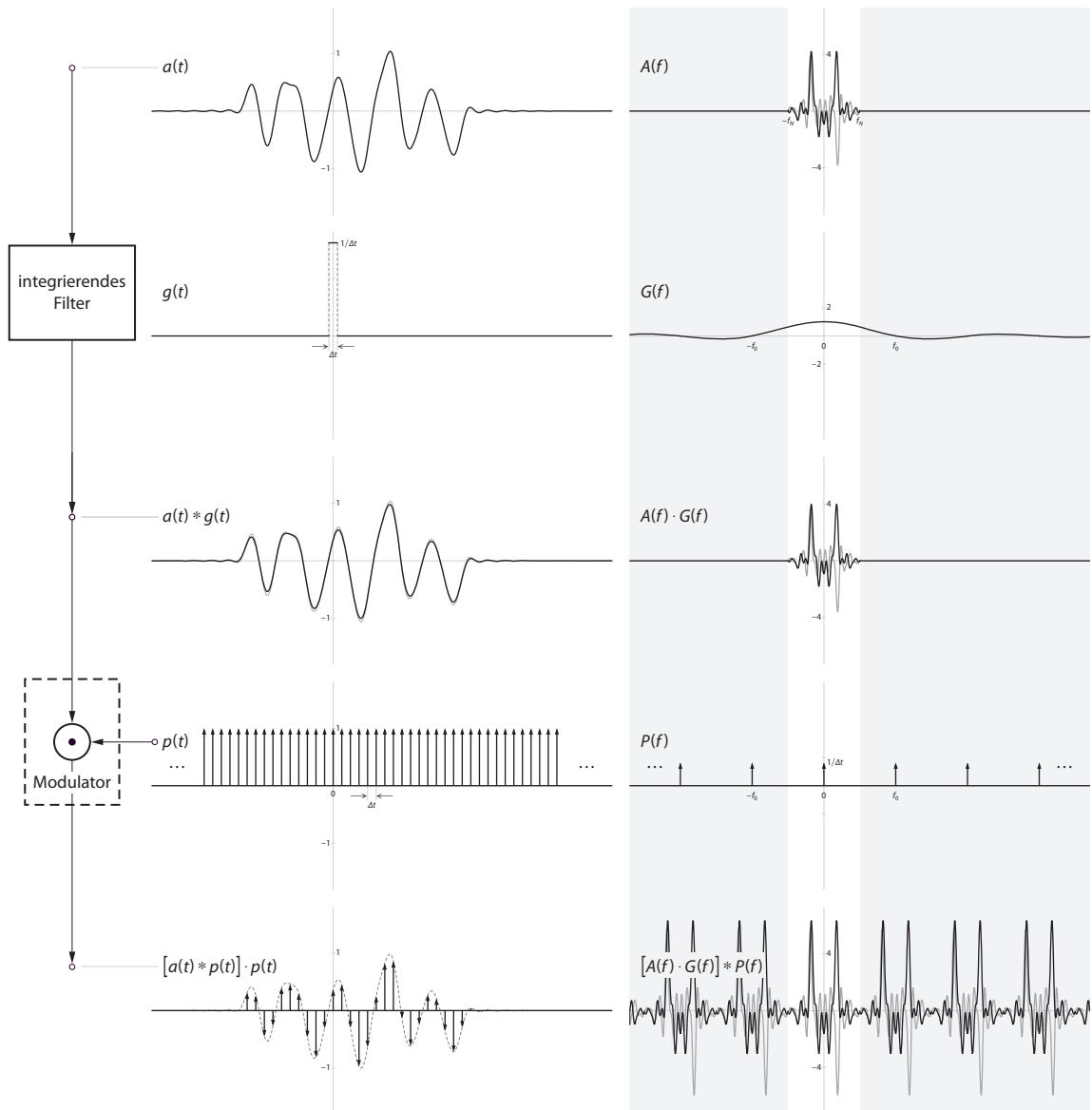
Im Frequenzbereich ist die Rückgewinnung des kontinuierlichen Signals offensichtlich: Die periodischen Wiederholungen des Signalspektrums werden durch den idealen Tiefpaß der Grenzfrequenz  $f_N$  weggefiltert. Im Fall von Unterabtastung wird dadurch jedoch ein zumindest in Teilen verfälschtes Signalspektrum rekonstruiert, mithin eine nachhaltig gestörte Funktion, denn das Herausrechnen der Alias-Anteile ist im allgemein unmöglich. Bei Unterabtastung entsprechend  $2f_N > f_{\max} > f_N$  lassen sich mit einem Tiefpaß geringerer Grenzfrequenz auch die verfälschten Spektralanteile weggefiltert, was allerdings zu einer unnötig stark tiefpaß-gefilterten Rekonstruktion führt. Es ist nämlich immer günstiger Signalspektren vor der Abtastung korrekt zu begrenzen, als nach Unterabtastung die Alias-Anteile wegzufiltern.<sup>10</sup>

<sup>7</sup> Er nannte sie angeblich „eine Funktion von königlichem Blute aus der Familie der ganzen Funktionen, deren hochrangige Eigenschaften sie von ihren bürgerlichen Brüdern unterscheidet“ (*a function of royal blood in the family of entire functions, whose distinguished properties separate it from its bourgeois brethren*). Freilich ist die Kardinalreihe letztlich eine spezielle Lagrangesche Interpolationsreihe.

<sup>8</sup> Die Realisierbarkeit ideal frequenzbegrenzender Filter ist einerseits prinzipiell unerheblich, andererseits mitunter sogar gegeben. Außer idealen sind nämlich allgemein Tiefpässe mit  $S(|f| > f_N) = 0$  geeignet, also auch solche mit prinzipiell behebbaren linearen Dämpfungsverzerrungen, wie bei der optischen Abbildung aufgrund von Beugung. Im Fall zeitabhängiger Signale und der damit verbundenen Einschränkung auf Filter endlicher Flankensteilheit und Dämpfung arbeitet man mit Überabtastung ( $f_{\max} < f_N$ ) und toleriert Fehler in der Größenordnung der jeweiligen Verarbeitungsgenauigkeit.

<sup>9</sup> Neben Unwissenheit und Ignoranz ist vordringliche Ursache das Dilemma, entweder detailreiche Signale zu verstümmeln oder die Kosten adäquater Abtastung aufzubringen.

<sup>10</sup> Dies verdeutlicht Unterabtastung mit  $f_{\max} = f_0$ , derzufolge es keine ungestörten Signalanteile mehr gibt, wogegen auf  $f_{\max}/2$  frequenzbegrenzte Signale mit derselben Abtastfrequenz  $f_0$  prinzipiell fehlerfrei zu diskretisieren sind ...



Integrierende Diskretisierung einer kontinuierlichen frequenzbegrenzten Funktion  $a(t)$  entsprechend dem Signalfluß-Schema (links), dargestellt sowohl im Zeitbereich (daneben) als auch im Frequenzbereich (rechts) durch die komplex-wertigen Fourier-Spektren der zeitlichen Funktionen (schwarz: Realteil, grau: Imaginärteil). Die Integrationsdauer ist gleich der Abtastperiode gewählt. Das Symbol „\*“ steht für die Faltungsoperation.

## Integrierende Abtastung

Weitgehend punktförmige Abtastung ist besonders bei der Diskretisierung ortsabhängiger Funktionen, beispielsweise optisch erfaßter bildhafter Signale, aus physikalischen Gründen unmöglich. Nicht zeit-

punktförmige Abtastung geschieht zum Beispiel beim klassischen Kinofilm. Lichtquanten erzeugen im ersten Fall elektrische Ladungen in Halbleiter-Sensorelementen, im zweiten metallische Silberkeime in der Photoemulsion von Filmbildern. Beidemale wird bei der Diskretisierung integriert, im ersten Fall



lokal, im zweiten kurzzeitig.<sup>11</sup> Für das „Digitale Kino“ werden Bewegungsszenen sowohl örtlich als auch zeitlich integrierend diskretisiert: Die in einem Element eines Bildsensors für ein Filmbild erzeugte Ladung, mithin ein Abtastwert, hängt ab von der Zahl der während der Einzelbild-Belichtungszeit auf die Elementfläche auftreffenden Lichtquanten.

Die systemtheoretische Beschreibung integrierender Abtastung gelingt mit Hilfe eines ihr funktional äquivalenten Schemas. Weil die integrierende Abtastung ebenfalls Folgen (zeit)punktförmiger Werte erzeugt, bleibt es bei der Modulation des Abtastpulses, nun allerdings mit dem entsprechend der Integrationszeit oder -fläche leicht „verunscharften“, das heißt tiefpaß-gefilterten Signal. Formal ist letzteres das Faltungsprodukt aus der Funktion  $a(t)$  und der „Verunscharfungsfunktion“  $g(t)$ , die in vielen Fällen durch eine Rechteckfunktion zu nähern ist, deren Breite die Integrationsdauer oder das lokale Integrationsprofil bedeutet. Auch die dadurch hervorgerufenen linearen Signalverzerrungen<sup>12</sup> lassen sich prinzipiell durch inverse Filterung rückgängig machen.

Die kurzzeitige oder lokale Integration mag dazu verleiten, sie als frequenzbegrenzende Filterung anzusehen und auf eine eigenständige Vorfilterung zu verzichten. Tatsächlich kann sie jedoch nicht in der erforderlichen Weise frequenzbegrenzend wirken, denn für realistische, wenig ausgedehnte Funktionen  $g(t)$  sind Übertragungsfunktionen  $G(|f| > f_N) = 0$  unerreichbar. Selbst wenn man sich bei einer Rechteckfunktion  $g(t)$  damit begnügen würde, lediglich die erste Nullstelle von  $G(f)$  auf  $f_N$  zu legen, wäre dazu die Integrationsdauer  $2\Delta t$  erforderlich. Überlappende Integrationszeiten oder -flächen sind jedoch nur in speziellen Fällen technisch möglich, beispielsweise bei sequenziell arbeitenden (elektronen) optischen Bildabtastern, wie Röhren-Fernsehkameras oder „Flying-Spot“-Scannern, bei denen zudem  $g(t)$  und  $G(f)$  meist ungefähr die Form einer rotations-symmetrischen Gauß-Glocke aufweisen.<sup>13</sup>

## Näherungsweise Interpolation

Oft ist die Signalrekonstruktion durch Interpolation mit dem *Sinus cardinalis* impraktikabel: Der Interpolationskern ist prinzipiell unendlich ausgedehnt und klingt nur langsam ab. Weil unter anderen Meijering (2002) eine umfängliche Übersicht näherungsweise Verfahren gibt, sei hier nur kurz erwähnt, daß gewisse Spline-Funktionen (spezielle *Cubic Splines*) optimal hinsichtlich Kern-Ausdehnung, Glattheit (kontinuierliche Ableitungen) und Approximationsgüte sind. Zu beachten gilt allerdings, daß Spline-Funktionen nicht auf die Abtastwerte selbst, sondern auf daraus errechnete Koeffizienten anzuwenden sind, mithin eine Vorverarbeitung der diskreten Funktion erforderlich ist.

Als Beispiel äußerst schlichter Interpolation sei schließlich die praktisch allgegenwärtige, aber selten als solche erkannte, bei der Darstellung digitalisierter Bildsignale durch LCD- oder OLED-Bildschirme genannt. Ein Abtastwert wird dabei über eine kleine Fläche ausgedehnt sichtbar gemacht, die bei LCD-Schirmen durch eine Lichtventil-Zelle, bei der OLED-Technik durch ein lichtemittierendes Element gegeben ist. Füllen die Flächenelemente den Schirm näherungsweise lückenlos, so liegt – mit den dann sogenannten Blockbildern – Interpolation nullter Ordnung vor.<sup>14</sup> Dagegen sind vor allem bei Farbbildschirmen die Elemente notwendig kleiner, so daß sowohl Farbmischung als auch örtliche Interpolation überwiegend dem begrenzten Auflösungsvermögen des visuellen Systems des Betrachters überlassen bleibt. Anders (elektronen)optische Verfahren, wie Kathodenstrahl- und Projektions-Röhren oder Digitalprojektoren, bei denen die Profile der Interpolationskerne meist etwa Gauß-förmig verlaufen.<sup>15</sup>

## Literatur

- Bennett W.R. (1941) Time division multiplex systems. *Bell System Technical Journal* **20**: 199–221. doi:10.1002/j.1538-7305.1941.tb03601.x  
 Higgins J.R. (1985) Five short stories about the cardinal series. *Bulletin of the American Mathematical Society* **12**: 45–89. doi:10.1090/S0273-0979-1985-15293-0

<sup>11</sup> Photoemulsionen werden hier sinngemäß nicht als ortsdiskret betrachtet. Wegen der Quantennatur des Lichts und der lichtempfindlichen Moleküle liegt der Bildgebung freilich ein (ortsdiskret binär-statistischer) Poisson-Prozeß zugrunde.

<sup>12</sup> Die durch integrierende Abtastung bewirkte lineare Signalverzerrung wird oft und nicht ganz zutreffend als „Apertur“-Fehler bezeichnet, wobei „Apertur“ die Integrationsfenster-Funktion  $g(t)$  meint.

<sup>13</sup> Die Gauß-Glockenfunktion und ihre Fourier-Transformierte bilden ebenso ein Fourier-Paar wie die  $\delta$ -Kammfunktion, das heißt Funktion und Fourier-Transformierte sind vom selben Funktionstyp. (Die Herleitung beider Korrespondenzen ist nicht trivial.)

<sup>14</sup> Die Interpolation geschieht sinngemäß wie mit Funktion  $g(t)$ , wobei das rekonstruierte Signal durch die unzureichend unterdrückten wiederholten Signalspektren erheblich gestört ist. Bei hinreichend kleinen Blöcken oder entsprechend großen Betrachtungsabständen wirkt vorwiegend das visuelle System frequenzbegrenzend.

<sup>15</sup> Bei hochwertiger Digitalprojektion liegen die ortsspektralen Halbwertsbreiten der Kernprofile bei typisch  $\pm f_N$ .



- Hodges A. (1983) *Alan Turing. The enigma*. Burnett Books, London. – dt. (1989) *Alan Turing. Enigma*. Kammerer & Unverzagt, Berlin.
- Kotel'nikov V.A. (1933) O propusknoi sposobnosti "efira" i provoloki v elektrosvyazi (On the transmission capacity of the "ether" and wire in electrocommunications). In: Vsesoyuznyi Energeticheskii Komitet (The All-Union Energy Committee) (Hrsg.) *Materialy k I Vsesoyuznomu S'ezdu po Voprosam Tekhnicheskoi Rekonstruktsii Dela Svyazi i Razvitiya Slabotochnoi Promyshlennosti. Po Radioseksii (Materials for the 1<sup>st</sup> All-Union Congress on the Technical Reconstruction of Communication Facilities and Progress in the Low-Currents Industry. At Radio Section)*. Upravlenie Svyazi RKKA, Moscow, pp. 1–19. – en. (2001) In: Benedetto J.J. und Ferreira P.J.S.G. (Hrsg.) *Modern sampling theory. Mathematics and applications*. Birkhäuser, Boston, pp. 27–45. – Nachdruck (2006) On the transmission capacity of "ether" and wire in electric communications. *Physics-Uspekhi* **49**: 736–744. doi:10.1070/PU2006v049n07ABEH006160
- Meijering E. (2002) A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing. *Proceedings of the IEEE* **90**: 319–342. doi:10.1109/5.993400
- Neubauer A. (2003) *Irreguläre Abtastung: Signaltheorie und Signalverarbeitung*. Springer, Berlin.
- Nyquist H. (1928) Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* **47**: 617–644. doi:10.1109/T-AIEE.1928.5055024
- Oliver B.M., Pierce J.R. und Shannon C.E. (1948) The philosophy of PCM. *Proceedings of the IRE* **36**: 1324–1331. doi:10.1109/JRPROC.1948.231941
- Papoulis A. (1962) *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill, New York/NY.
- Raabe H. (1939) Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachübertragung (Multiplexübertragung). *Elektrische Nachrichtentechnik* **16**: 213–228.
- Shannon C.E. (1949) Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE* **37**: 10–21. doi:10.1109/JRPROC.1949.232969
- Someya I. (1949) *Hakei Denso (Waveform Transmission)*. Shyukyo, Tokyo.
- Weston J.D. (1949) A note on the theory of communication. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science: Series 7* **40**: 449–453. doi:10.1080/14786444908521732
- Whittaker E.T. (1915) On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **35**: 181–194. doi:10.1017/S0370164600017806